Apellido y nombres: ....
Padrón: .... Correo electrónico: ....
Cursada. Cuatrimestre: .... Año: .... Profesor: ....

Análisis Matemático III.
Examen Integrador. Cuarta fecha. 16 de febrero de 2018.

1		2		3		4	
a	b	a	b	a	b	a	b

Justificar claramente todas las respuestas. La aprobación del examen requiere la correcta resolución de 4(cuatro) ítems, entre los cuales debe figurar uno del ejercicio 1 o del 2 y uno del ejercicio 3 o del 4.

Ejercicio 1

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, analizar qué tipo de singularidades tiene f_n en infinito y calcular $\displaystyle\int_{|z|=2} f_n(z)dz$, siendo $f_n(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z^n}$.

b) Hallar una función $u(x, y)$ que cumple con la ecuación de Laplace en el interior de la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1/2| = 1/2\}$ y con las siguientes condiciones de contorno sobre la circunferencia: sobre la mitad derecha vale 10, sobre la izquierda vale 5 en su mitad superior y 0 en la inferior.

Ejercicio 2

a) Resolver: $\begin{cases} u_{xx} = u_{tt} & 0<x<1,\ t>0 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t \geqslant 0 \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u_t(x,0) = \operatorname{sen}(2\pi x) & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$

y describir un sistema físico que pueda ser modelado de esta forma.

b) Considerar f una función par y cuadrado integrable en $[-a, a] (a > 0)$ y para la cual $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{a}\right) dt = \frac{r^n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué valores de r existe la serie trigonométrica de Fourier de f en $[-a, a]$? En los casos afirmativos, desarrollar la serie y obtener una expresión de $\displaystyle\int_0^a |f(t)|^2 dt$.

Ejercicio 3

a) Enunciar condiciones sobre f que aseguren la existencia de $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]]$ e indicar cómo se relaciona con f.

b) Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} w}{w} \cos w \, dw$ usando la función $\mathbb{1}_{[-a,a]}(t)$ para algún $a > 0$ adecuado.

Ejercicio 4

a) Enunciar y probar la propiedad que relaciona la transformada de LApalce de la convolución de dos funciones con las transformadas de Laplace de ambas funciones, especificando hipótesis necesarias para su validez.

b) Resolver la ecuación integral en la incógnita φ:

$$\int_0^x e^{-2t}\varphi(t)\,dt = e^{-2x}y(x) \quad \text{para } x > 0,$$

siendo $y : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ la solución del problema: $y'(x) - 2y(x) = \cos^5 x, \quad y(0) = 0.$